Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Processo de Nascimento (Puro)

$\mathcal{S} = \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$

Cadeia de saltos: $(Y_n)_{n\geq 0}$ tq $P_{x,x+1} = 1$, $x \in \mathbb{N}$

Tempo de permanência em $x \sim \text{Exp}(q_x)$, onde

$0 \leq q_x < \infty$, $x \in \mathbb{N}$, são as *taxas de nascimento*

Dado que $X_0 = x \in \mathbb{N}$, então $Y_n = n + x$, $n \geq 0$, e os tempos de salto $T_1, T_1, \dots$ são exponenciais independentes, $T_n \sim \text{Exp}(q_{n+x})$.

Exemplos. 1) O PP(λ) é um PN com $q_x \equiv \lambda$.

2) *Processo de nascimento simples* ou *linear*.

Em certa população, os indivíduos se reproduzem, independentemente cada um dos demais, à taxa $\lambda > 0$ (isto é, cada indivíduo produz descendentes — um por vez — em tempos Exp(λ), independentemente dos demais).

PN simples (cont)

Pela falta de memória da distr exp, a pop, qdo está com tamanho n, cresce para $n+1$ num tempo que é o mínimo de n exps indeps, cada uma de taxa λ, logo com distr Exp$(n\lambda)$.

Logo $(X_t) \sim$ PN$(q_x = x\lambda,\, x \in \mathbb{N})$.

Vamos calcular $\mu(t) := \mathbb{E}(X_t)$ sob $\mathbb{P}_1$.

Seja T o tempo do nascimento do 1o descendente do 1o ind da pop (aquele presente na pop no tempo 0): $T \sim$ Exp(λ).

Temos que

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= \mathbb{E}_1(\overbrace{X_t}^{1}, T > t) + \mathbb{E}_1(X_t, T \le t) \\
&= \quad \mathbb{P}_1(T > t) \quad + \quad \int_0^t ds\,\lambda\, e^{-\lambda s} \quad \underbrace{\mathbb{E}_1(X_t | T = s)}_{\mathbb{E}_2(X_{t-s}) \overset{*}{=} 2\,\mathbb{E}_1(X_{t-s})} \\
&= e^{-\lambda t} + 2\int_0^t ds\lambda\, e^{-\lambda s}\,\mu(t-s) \qquad (1)
\end{aligned}$$

---

*Sob $\mathbb{P}_2$, $(X_t) =$ soma de 2 PNs indep sob $\mathbb{P}_1$.

PN simples (cont)

Multiplicando por $e^{\lambda t}$ os 2 lados de (1):

$$\nu(t) := \mu(t)e^{\lambda t} = 1+2\lambda \int_0^t ds\, \overbrace{e^{\lambda(t-s)}\,\mu(t-s)}^{\nu(t-s)} = 1+2\lambda \int_0^t ds\, \nu(s)$$

Diferenciando: $\nu'(t) = 2\lambda\nu(t) \Rightarrow \nu(t) = \text{const } e^{2\lambda t}$.

$\nu(0) = \mu(0) = 1 = \text{const}$

Logo, $\nu(t) = e^{2\lambda t}$ e $\mu(t) = e^{-\lambda t}\nu(t) = e^{\lambda t}$.

Explosão

Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_1$ e $\zeta = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Teorema 1

Seja (X_t) um PN com taxas de nascimento $(q_x)_{x\in\mathbb{N}}$; $X_0 = 0$.

(i) Se $\sum_{x\in\mathbb{N}} \frac{1}{q_x} < \infty$, então $\mathbb{P}(\zeta < \infty) = 1$.

(ii) Se $\sum_{x\in\mathbb{N}} \frac{1}{q_x} = \infty$, então $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1$.

Dem. Basta aplicar o Teorema 2 do Álbum 9.

$\square$

Propriedade de Markov

Pode ser estabelecida para os PNs de forma similar ao caso do PP.

Caracterizações equivalentes do PN

Teorema 2

Seja (X_t) um processo não decrescente, contínuo à direita em $\bar{\mathbb{N}}$. Sejam $0 \leq q_x < \infty$, $x \in \mathbb{N}$. São equivalentes

a) (X_t) é um PN com txs (q_x) (como definido acima).

b) Dado que $X_t = x$, $(X_{t+s})_{s\geq 0}$ é indep de $(X_r)_{r<t}$, e, unif/e em t:

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0 \,|\, X_t = x) = 1 - q_x h + o(h),$$
$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1 \,|\, X_t = x) = q_x h + o(h).$$

c) (X_t) é Markoviano, temporalmente homogêneo, e

$$\mathbb{P}_x(X_t = y) = P_{xy}(t),\ t \geq 0,$$

onde $\{P_{xy}(t);\, x, y \in \mathbb{N};\, t \geq 0\}$ é a (única) solução de

$$(*) \begin{cases} P'_{x0}(t) = -q_0 P_{x0}(t),\ \ P_{x0}(0) = \delta_{x0}; \\ P'_{xy}(t) = -q_y P_{xy}(t) + q_{y-1} P_{x,y-1}(t),\ \ P_{xy}(0) = \delta_{xy},\ y \geq 1. \end{cases}$$

Dem. Similar à do caso do PP.

Probs de transição no tempo t

$(*)$ pode ser resolvido recursivamente, similar/e ao caso do PP.

Vamos considerar o caso em que $x = 0$ e q_x's positivos e distintos.

$$P_{00}(t) = e^{-q_0 t};\ P'_{01}(t) = -q_1 P_{01}(t) + q_0 P_{00}(t), \text{ e logo}$$

$$(P_{01}(t)e^{q_1 t})' = q_0\, e^{(q_1 - q_0)t} \Rightarrow P_{01}(t) = e^{-q_1 t} \int_0^t q_0\, e^{(q_1 - q_0)s} ds.$$

Finalmente,

$$P_{01}(t) = \tfrac{q_0}{q_1 - q_0} e^{-q_1 t}(e^{(q_1 - q_0)t} - 1) = \tfrac{q_0}{q_1 - q_0}(e^{-q_0 t} - e^{-q_1 t})$$

Prob trans (cont)

Similarmente, de $P'_{02}(t) = -q_2 P_{02}(t) + q_1 P_{01}(t)$ segue:

$$P_{02}(t)\, e^{q_2 t} = \frac{q_1 q_0}{q_1 - q_0} \int_0^t (e^{(q_2 - q_0)s} - e^{(q_2 - q_1)s}) ds$$

$$= \frac{q_1 q_0}{q_1 - q_0} \Big[\frac{1}{q_2 - q_0} (e^{(q_2 - q_0)t} - 1) - \frac{1}{q_2 - q_1} (e^{(q_2 - q_1)t} - 1) \Big],$$

e logo

$$P_{02}(t) = \frac{q_1 q_0}{q_1 - q_0} \Big[\frac{1}{q_2 - q_0} (e^{-q_0 t} - e^{-q_2 t}) - \frac{1}{q_2 - q_1} (e^{-q_1 t} - e^{-q_2 t}) \Big],$$

e assim por diante.